Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τμήμα Μαθηματικών
Τομέας Άλγεβρας και Γεωμετρίας
Διαφορική Γεωμετρία

Σεπτέμβριος 2015

1. Έστω η καμπύλη $\mathfrak{c} : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ η οποία έχει το s ως μήκος τόξου καμπυλότητα $\kappa(s) > 0$ και στρέψη διάφορη του μηδενός. Αν $\widetilde{\mathfrak{c}}(s) = \vec{\mathrm{b}}(s)$ τότε:

   (α΄) Να δείξετε ότι η $\widetilde{\mathfrak{c}}$ είναι κανονική και σφαιρική.

   (β΄) Η καμπυλότητα της $\widetilde{\mathfrak{c}}$ είναι σταθερή αν και μόνο αν η $\mathfrak{c}$ είναι σταθερής κλίσης.

   (γ΄) Να δείξετε ότι ισχύει $\dfrac{\dot{\kappa}\tau - \dot{\tau}\kappa}{\tau\left(\tau^2 + \kappa^2\right)} = \widetilde{\tau}(s)$ και ότι η $\mathfrak{c}$ είναι σταθερής κλίσης αν και μόνο αν η $\widetilde{\mathfrak{c}}$ είναι επίπεδη.

2. Δίνεται η $\mathbf{X}(s,t) = (x(s), y(s), t)$ όπου $\mathfrak{c}(s) = (x(s), y(s), 0)$ καμπύλη του επιπέδου Oxy με παράμετρο το μήκος τόξου s.

   (α΄) Να δείξετε ότι η $\mathbf{X}$ είναι κανονική και αναπτυκτή.

   (β΄) Αν η $\mathbf{X}$ έχει σταθερή μέση καμπυλότητα ίση με $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε να βρεθεί η εικόνα της $\mathfrak{c}$.

3. (α΄) Να δείξετε ότι καμία ευθειογενής επιφάνεια δεν είναι τοπικά ισομετρική με σφαίρα. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

   (β΄) Να δείξετε ότι $\tau^2(s) = -\mathsf{k}\left(\mathfrak{c}(s)\right)$, όπου $\mathfrak{c}(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ η οποία είναι κανονική $(\kappa(s) > 0)$ και ασυμπτωτική γραμμή και k η καμπυλότητα Gauss.

4. Έστω $\mathbf{X}(u,v)$ κανονική παραμετρική επιφάνεια με $\mathbf{N}(u,v)$ μοναδιαίο κάθετο ~~εφαπτόμενο~~ και $\mathbf{N}_u(u,v) = \lambda \mathbf{X}_u(u,v)$ καθώς και $\mathbf{N}_v(u,v) = 0$.

   (α΄) Να δείξετε ότι $\mathbf{F} = 0$ και να βρεθεί η καμπυλότητα Gauss.

   (β΄) Να δείξετε ότι $\mathbf{X}_v$ είναι σταθερό διάνυσμα και ότι η παραμετρική γραμμή $u = u_0 =$ σταθ. παριστάνει ευθεία.

   (γ΄) Να δείξετε ότι $\mathbf{X}_v$ είναι κύκλος

   (το υποερώτημα γ' πιθανότατα είναι ΛΑΘΟΣ).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!